А. С. Захаров

Новосибирский государственный университет,

a-a-a-a@inbox.ru

АЛГЕБРЫ НОВИКОВА – ПУАССОНА И СУПЕРАЛГЕБРЫ ЙОРДАНОВЫХ СКОБОК

Алгебры Новикова возникли в работах [1] и [2]. Простые алгебры Новикова изучались Зельмановым, который доказал, что простая конечномерная алгебра Новикова над полем характеристики нуль есть поле. В.Т. Филиппов построил пример простой конечномерной алгебры Новикова над полем характеристики p и бесконечномерной в поле нулевой характеристики. Алгебры Новикова – Пуассона были введены в [3]. А.С. Тихов и В.Н. Желябин [4] рассматривали алгебры Новикова – Пуассона с ассоциативной коммутативной единицей.

По определению, векторное пространство $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ с двумя умножениями называется алгеброй Новикова – Пуассона, если $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра и верны тождества

$$(x\circ y)\circ z = (x\circ z)\circ y; (x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z) = (y\circ x)\circ z - y\circ(x\circ z); \quad (1)$$

$$xy\circ z = x(y\circ z); (x\circ y)z - x\circ(yz) = (y\circ x)z - y\circ(xz). \quad (2)$$

При этом $\langle A, \circ\rangle$ — алгебра Новикова. По ассоциативной коммутативной алгебре $\langle A, \cdot\rangle$ с кососимметричной операцией $\{,\}$, которую будем называть скобкой, можно построить дубль Кантора следующим образом.

Пусть $J(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A. Введем умножение слудующим образом:

$$a \bullet b = ab;\ a\xi \bullet b = a \bullet b\xi = (ab)\xi;\ a\xi \bullet \xi b = \{a, b\}.$$

Для алгебры Новикова – Пуассона $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ введем скобку по правилу $\{a, b\} = a \circ b - b \circ a$.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — векторное пространство с двумя умножениями, такое, что $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра, и верны тождества (2). Тогда построенный по $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ дубль Кантора $J(A, \{,\})$ будет йордановой супералгеброй.*

Более того, простота алгебры Новикова и соответствующего ей дубля Кантора имеют связь.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебраическая система с двумя умножениями, такая, что $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра и верны тождества (2). Если соответствующий ей дубль Кантора $J(A, \{,\})$, является простой супералгебра, то*

1) алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ имеет единицу 1;

2) отображение $\partial : A \mapsto A$, определенное правилом $\partial(a) = 1 \circ a - (1 \circ 1)a$, является дифференцированием алгебры $\langle A, \cdot\rangle$;

3) алгебра $\langle A, \circ\rangle$ — простая алгебра Новикова и умножение $\circ$ задается формулой $a \circ b = a\partial(b) + (1 \circ 1)ab$.

Теорема 3. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра Новикова – Пуассона и $J(A, \{,\})$ — соответствующей ей дубль Кантора. Если алгебра Новикова $\langle A, \circ\rangle$ проста и $AA = A$, то алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ имеет единицу, и либо $\langle A, \circ\rangle$ — поле, либо $J(A, \{,\})$ — проста. При этом скобка $\{,\}$ задается формулой $\{a, b\} = a\partial(b) - \partial(a)b$.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект

2.1.1.10726), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 гг. (Госконтракт 14.740.11.0346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. , Дорфман И. Я. *Гамильтоновы опреаторы и связанные с ними алгебраические структуры* // Функц. анализ и его прил. – 1979. – № 5. – С. 13 30.

2. Балинский А. А., Новиков С. П. *Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли* // ДАН СССР. 1985. – № 5. – С. 1036–1039.

3. Xu X. *Novikov – Poisson algebra* // J. Algebra. – 1997. – No 2. – P. 253–279.

4. Желябин В. Н., Тихов А. С. *Алгебры Новикова – Пуассона и ассоциативные коммутативные дифференциальные алгебры* // Алгебра и логика. – 2008. – № 2. – С. 186–202.